

Aula 03

Indução Finita e Somatórios

Prof. Marco Aurélio Stefanés
marco em dct.ufms.br
www.dct.ufms.br/~marco

Aula 03 – p. 1

Princípio da boa ordenação

Um conjunto de números naturais pode não possuir um elemento máximo.
Todo conjunto S de inteiros positivos não vazio contém um elemento mínimo. Ou

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (S \neq \emptyset \rightarrow S \text{ possui elemento mínimo}))$$

Aula 03 – p. 2

Princípio da boa ordenação

Um conjunto de números naturais pode não possuir um elemento máximo.
Todo conjunto S de inteiros positivos não vazio contém um elemento mínimo. Ou

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (S \neq \emptyset \rightarrow S \text{ possui elemento mínimo}))$$

$$\exists m(m \in S \wedge \forall x(x \in S \Rightarrow m \leq x))$$

Aula 03 – p. 2

Princípio da boa ordenação

Um conjunto de números naturais pode não possuir um elemento máximo.
Todo conjunto S de inteiros positivos não vazio contém um elemento mínimo. Ou

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (S \neq \emptyset \rightarrow S \text{ possui elemento mínimo}))$$

$$\exists m(m \in S \wedge \forall x(x \in S \Rightarrow m \leq x))$$

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (\neg \exists m(m \in S \wedge \forall x(x < m \Rightarrow S = \emptyset))))$$

Aula 03 – p. 2

Princípio da boa ordenação

Um conjunto de números naturais pode não possuir um elemento máximo.

Todo conjunto S de inteiros positivos não vazio contém um elemento mínimo. Ou

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (S \neq \emptyset \rightarrow S \text{ possui elemento mínimo}))$$

$$\exists m(m \in S \wedge \forall x(x \in S \Rightarrow m \leq x))$$

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (\neg \exists m(m \in S \wedge \forall x(x < m \Rightarrow S = \emptyset))))$$

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (\neg \exists m(m \notin S \wedge \forall x(x < m \Rightarrow S = \mathbb{N}))))$$

Aula 03 – p. 2

Princípio da boa ordenação

Um conjunto de números naturais pode não possuir um elemento máximo.

Todo conjunto S de inteiros positivos não vazio contém um elemento mínimo. Ou

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (S \neq \emptyset \rightarrow S \text{ possui elemento mínimo}))$$

$$\exists m(m \in S \wedge \forall x(x \in S \Rightarrow m \leq x))$$

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (\neg \exists m(m \in S \wedge \forall x(x < m \Rightarrow S = \emptyset))))$$

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (\neg \exists m(m \notin S \wedge \forall x(x < m \Rightarrow S = \mathbb{N}))))$$

$$\forall S(S \subset \mathbb{N} \Rightarrow (\forall m(\forall x(x < m \Rightarrow x \in S) \Rightarrow m \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}))$$

Aula 03 – p. 2

Indução Finita Fraca

Quero mostrar que uma propriedade P vale para todo $n \geq n_0$

Base Devo mostrar que P vale para n_0

Hipótese de Indução Supor que P vale para $n - 1$

Passo Indutivo Provar que se P vale para $n - 1$ então P vale também para n

Isto implica que a propriedade P vale para todo $n \geq n_0$

Aula 03 – p. 3

Exemplo

Progressão Aritmética

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Base $S(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

Hipótese $S(n-1) = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$

Passo Indutivo

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = S(n-1) + n$$

$$S(n) = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2}$$

$$S(n) = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aula 03 – p. 4

Exemplo

Progressão Geométrica $a \neq 1$

$$S(n) = \sum_{i=0}^n a^i = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Base $S(0) = \frac{a^1 - 1}{a - 1} = 1$

Hipótese $S(n - 1) = \frac{a^n - 1}{a - 1}$

Passo Indutivo

$$S(n) = \sum_{i=1}^n a^i = \sum_{i=1}^{n-1} a^i + a^n = S(n - 1) + a^n$$

$$S(n) = \frac{a^n - 1}{a - 1} + a^n = \frac{a^n - 1 + a^n(a - 1)}{a - 1}$$

$$S(n) = \frac{a^n - 1 + a^{n+1} - a^n}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Indução Finita Forte

Quero mostrar que uma propriedade P vale para todo $n \geq n_0$

Base Devo mostrar que P vale para n_0

Hipótese de Indução Supor que P **vale para todo** k
 $n_0 \leq k \leq n - 1$

Passo de Indução Provar que se P vale para todo $k < n$
então P vale também para n

Isto implica que a propriedade P vale para todo $n \geq n_0$

Exemplo

A Seqüência de Fibonacci é definida pela seguinte fórmula:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2},$$

assim produzimos a seqüência

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Exemplo

A Seqüência de Fibonacci é definida pela seguinte fórmula:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2},$$

assim produzimos a seqüência

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Mostrar que podemos calcular F_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$

Base $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

Exemplo

A Seqüência de Fibonacci é definida pela seguinte fórmula:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2},$$

assim produzimos a seqüência

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Mostrar que podemos calcular F_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$

Base $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

Hipótese Supomos que F_k pode ser calculado para todo $k < n$.

Passo de Indução Pela definição temos $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Como pela hipótese podemos calcular F_{n-1} e F_{n-2} então podemos calcular F_n .

Aula 03 – p. 7

Somatórios

🔴 O tempo de execução do Insertion-Sort é determinado pelos laços aninhados

$$j = 2$$

while $j \leq n$ **do**

$$k = A[j]$$

$$i = j - 1$$

while $i > 0$ **E** $A[i] > k$ **do**

$$A[i + 1] = A[i]$$

$$i = i - 1$$

$$A[i + 1] = k$$

$$j = j + 1$$

🔴 Laços aninhados correspondem a somas

$$\sum_{j=2}^n (j-1) = O(n^2)$$

Aula 03 – p. 8

Somatórios

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Exerc. Provar usando indução. Em geral, temos

$$\sum_{i=1}^n i^d \approx \frac{n^{d+1}}{d+1} \in \Theta(n^{d+1})$$

A PG com $a < 1$ não possui crescimento exponencial!

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

Aula 03 – p. 9

Outras Somas

$$\sum_{i=a}^b r^i \in \Theta(r^b), \quad 0 < r \neq 1$$

$$\sum_{i=1}^n \log i \in \Theta(n \log n)$$

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{i=1}^n i 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

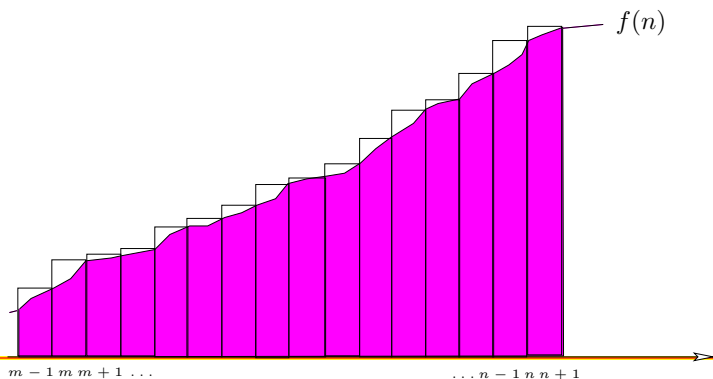
Aula 03 – p. 10

Somas e Integrais

Aproximação de somas por integrais

Seja $f(k)$ monotonicamente crescente

$$\int_{m-1}^n f(x)dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x)dx$$



Aula 03 – p. 11

Aproximação por integral

Para o limite inferior temos

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$$

$$= \ln(n+1)$$

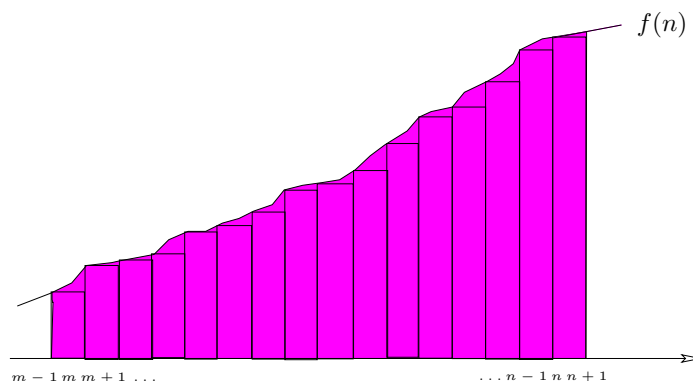
Para o limite superior temos

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$$

$$\geq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} \geq \ln n + 1$$

Aula 03 – p. 13

Aproximação por integral



Vamos ver como podemos calcular o valor da série harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

Aula 03 – p. 12

Exercício 1

Calcule S e prove onde $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$.

Resp. $S = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k$$

Aula 03 – p. 14

Exercício 1

Calcule S e prove onde $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$.

Resp. $S = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k^2$$

Idéia: $\int k^2 dk = k^3/3 + c$. Vamos assumir que S_1 é um polinômio da forma

$$S_1 = n^3/3 + an^2 + bn + c$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = n^3/3 + an^2 + bn + c \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \Rightarrow$$

$$1/3 + a + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 2/3$$

$$8/3 + 4a + 2b + c = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 7/3$$

$$27/3 + 9a + 3b + c = 14 \Rightarrow 9a + 3b + c = 5$$

Exercício 1 Cont.

Resolvendo temos $a = 1/2, b = 1/6$ e $c = 0$.

$$\text{Logo } S_1 = n^3/3 + n^2/2 + n/6 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{Provar que } S = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$

Exercício 1 Cont.

Resolvendo temos $a = 1/2, b = 1/6$ e $c = 0$.

$$\text{Logo } S_1 = n^3/3 + n^2/2 + n/6 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{Provar que } S = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$

Prova por indução em n

Base: $n = 1$

$$\text{Hipótese: } S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{(n-1)^3+3(n-1)^2+2(n-1)}{3}$$

$$\text{Passo: Provar que } S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1) = S_{n-1} + n(n+1)$$

$$= \frac{(n-1)^3+3(n-1)^2+2(n-1)+3n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n^3-3n^2+3n-1+3n^2-6n+3+2n-2+3n^2+3n}{3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{3} \quad \square$$

Exercício 2

Provar que $\sum_{k=1}^n O(f_k(n)) = O(\sum_{k=1}^n f_k(n))$.

Resp.:

Seja $g_k(n) = O(f_k(n))$, isto é, $\exists c_k, n_{0_k} > 0$ tal que

$$0 \leq g_k(n) \leq c_k f_k(n), \forall n \geq n_{0_k}, \text{ para cada } k = 1, 2, \dots, n.$$

Exercício 2

Provar que $\sum_{k=1}^n O(f_k(n)) = O(\sum_{k=1}^n f_k(n))$.

Resp.:

Seja $g_k(n) = O(f_k(n))$, isto é, $\exists c_k, n_{0_k} > 0$ tal que $0 \leq g_k(n) \leq c_k f_k(n), \forall n \geq n_{0_k}$, para cada $k = 1, 2, \dots, n$.

Seja $n_{0_{max}} = \max\{n_{0_k} : \text{onde } k = \dots, n\}$

Logo:

$$0 \leq \sum_{k=1}^n g_k(n) = \sum_{k=1}^n O(f_k(n)) \leq \sum_{k=1}^n c_k f_k(n), \forall n \geq n_{0_{max}}$$

Exercício 2 Cont.

Seja $c_{max} = \max\{c_k : k = 1 \dots n\}$

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(n) \leq \sum_{k=1}^n c_{max} f_k(n) = c_{max} \sum_{k=1}^n f_k(n), \forall n \geq n_{0_{max}}$$

Logo: $0 \leq \sum_{k=1}^n O(f_k(n)) \leq c_{max} \sum_{k=1}^n f_k(n), \forall n \geq n_{0_{max}}$

Exercício 2 Cont.

Seja $c_{max} = \max\{c_k : k = 1 \dots n\}$

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(n) \leq \sum_{k=1}^n c_{max} f_k(n) = c_{max} \sum_{k=1}^n f_k(n), \forall n \geq n_{0_{max}}$$

Logo: $0 \leq \sum_{k=1}^n O(f_k(n)) \leq c_{max} \sum_{k=1}^n f_k(n), \forall n \geq n_{0_{max}}$

Portanto,

$\exists c = c_{max}$ e $n_0 = n_{0_{max}}$ tal que $0 \leq \sum_{k=1}^n O(f_k(n)) \leq c \sum_{k=1}^n f_k(n), \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^n O(f_k(n)) = O\left(\sum_{k=1}^n f_k(n)\right) \square$$

Exercícios

- Prove que $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$
- Prove que $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
- Mostre que $\sum_{k=1}^n 1/k^2 = O(1)$
- Prove que $\sum_{k=1}^{\infty} \Omega(f(k)) = \Omega(\sum_{k=1}^{\infty} f(k))$